La sabbia e le stelle tra Archimede e Galileo

I parte

La conta degli innumerevoli granelli di un sabbioso universo

Se per singolare - ma non del tutto inverosimile - coincidenza, mentre magari passeggiamo in una notte chiara lungo la riva del mare, i nostri pensieri in libertà ci conducessero, partendo da considerazioni sopra l'immenso numero dei granelli di sabbia della spiaggia dinanzi a noi, a rimirare, sopra di noi, le innumerevoli stelle visibili nel cielo scuro, forse la nostra mente sarebbe portata a riflettere sull'infinitezza, o meglio sull'innumerabilità, che la moltitudine dei granelli di sabbia e dei punti luminosi del firmamento sembrano quasi automaticamente suggerire. Altri legami si potrebbero però stabilire tra i minuscoli granelli della sabbia e le minute immagini delle stelle del cielo, forse un po' più artificiosi ma non meno suggestivi; legami che ci porterebbero a considerare gli sforzi intellettuali di due tra le più grandi menti della storia culturale dell'Occidente, lontane nel tempo, ma singolarmente vicine nello stile e nel metodo delle loro indagini sulla costituzione del mondo. Parliamo di Archimede e Galileo. E la storia che ora racconteremo è in qualche modo legata ai loro difficili tentativi di valutazione quantitativa di cose che, per ragioni diverse, apparivano singolarmente difficili da misurare: da una parte i granelli di sabbia di cui l'antico studioso siciliano si proponeva di calcolare il numero, per immenso che fosse, e, dall'altro, le dimensioni delle immagini delle stelle, che lo scienziato toscano riteneva essere estremamente piccole, molto più minute di quanto da tempi immemorabili gli astronomi avessero supposto (e continuavano ancora a supporre, sulla base di misure più recenti, considerate - ma a torto si vedrà - molto precise).

Al grande pubblico Archimede è noto soprattutto come uno straordinario fisico e geniale inventore; e molti sono gli aneddoti che si raccontano sugli straordinari congegni o esperimenti concepiti dal suo ingegno brillante; come lo specchio ustorio con cui avrebbe permesso alle difese siracusane di annientare la flotta romana, secondo antichi racconti che ebbero nel Rinascimento, e poi all'epoca di Galileo, grande risonanza; o il principio del galleggiamento dei corpi, con l'episodio connesso del modo in cui, sulla base di questo principio, riuscì a dimostrare, senza ricorrere ad alcuna analisi chimica "distruttiva", che la corona "d'oro puro" del tiranno Gerone era stata in realtà fusa dall’infido gioielliere del sovrano mescolando all'oro zecchino una parte considerevole di argento. Cosa dire poi della famosa frase con cui Archimede avrebbe esaltato la potenza della leva, marcando in particolare, il potere del principio fisico da lui individuato, che sottostava al funzionamento di questo primordiale ma fondamentale congegno meccanico: “datemi un punto d'appoggio e solleverò la Terra"?

Ma Archimede fu anche, e soprattutto, un grande, grandissimo, matematico, forse il più geniale di tutti i tempi. E alcuni dei suoi problemi, come quello dei "Buoi del Sole" danno ancora qualche filo da torcere ai moderni cultori della scienza dei numeri e delle loro, più o meno astratte, combinazioni.[1] È proprio la matematica, e in particolare l'interesse per i grandi numeri uno dei legami che esiste per vie – come vedremo- abbastanza tortuose e poco prevedibili, tra il grande personaggio dell'antichità classica e il non meno grande eroe della rivoluzione scientifica moderna; e tra i moltissimi – (ma non del tutto innumerabili come vedremo) granelli della sabbia e i piccolissimi punti luminosi del firmamento.

In un'operetta conosciuta con il nome latino di *Harenarius* (e ampiamente circolata nel Rinascimento - soprattutto dopo che i suoi scritti erano stati pubblicati a Basilea nel 1544) e che qui indicheremo come *Arenario*, Archimede si propone un compito difficile e – apparentemente – peregrino, come accade spesso ai matematici: stimare il numero dei granelli di sabbia (cosa ci può essere – in apparenza – di più vano di contare i granelli di sabbia?!). Per rendere più arduo il suo compito (e dunque di maggior valore il successo dell'impresa) il nostro matematico precisa subito, rivolgendosi al sovrano di Siracusa Gelone destinatario del testo, che non si tratta per lui di dare semplicemente una stima dei granelli di sabbia che possono essere contenuti nelle spiagge di Siracusa, e neppure del resto della Sicilia, ma di una

---

[1] Il problema, di cui la paternità archimedea è molto probabile, sebbene non del tutto certa (almeno nella integralità del testo giunto fino a noi attraverso un complesso processo di trasmissione) viene posto in forma poetica (di epigramma). Il quesito matematico si articola in due fasi di crescente difficoltà. Si tratta di calcolare il numero dei vari tipi di buoi del Dio Sole che pascolano per le spiagge della Sicilia (tori e vacche). I buoi sono di vario colore (bianchi, neri, fulvi e screziati) e il calcolo deve soddisfare a un insieme di condizioni matematiche piuttosto arzigogolato. Nella prima fase viene stabilita una serie intricata di relazioni nell'ambito dei due gruppi (tori e vacche) tra i buoi di un dato colore e quelli di un altro (come per esempio "che i tori bianchi fossero in numero uguale ad una metà più un terzo dei neri, più tutti i fulvi; e che i tori neri fossero in numero uguale alla quarta parte più un quinto degli screziati, più tutti i fulvi"). In termini matematici queste condizioni configurano una serie di sette relazioni lineari in otto incognite. Viene detto che chi sarà in grado di risolvere il problema a questo stadio, sebbene non possa essere tacciato di ignoranza della matematica, nondimeno non potrà pretendere di essere annoverato tra i “sapienti della materia”. Per aspirare al gradino più elevato della scienza dei numeri bisognerà essere in grado di trovare la soluzione che soddisfa a due ulteriori condizioni che riguardano le possibile disposizioni spaziali della mandria nel suo complesso (condizioni che qui non trascriviamo ma che – sia detto - definiscono due relazioni matematiche di tipo quadratico). Gli studiosi moderni che si sono cimentati col problema dei *Buoi del Sole* (a partire dal matematico tedesco Carl Ernst August Amthor che per primo ne diede una soluzione nel 1880) hanno dovuto operare delle scelte interpretative sul testo del problema (che era andato probabilmente corrotto nel corso dei secoli per l'opera di copisti e traduttori). In ogni caso le soluzioni prevedono numeri eccezionalmente grandi (di 206545 cifre nel caso delle soluzioni di Amthor) e questo è un indizio della paternità archimedea del problema, data la propensione del matematico siracusano per i grandi numeri particolarmente evidente nel caso dell'*Arenario*. Prima di concludere questa lunga nota (e tornare alla conta dei granelli di sabbia) conviene forse qui rammentare che alle mandrie dei buoi del Sole che pascolano nelle pianure di Sicilia evocati da Archimede appartenevano quelli uccisi e divorati dai marinai di Ulisse. Per questo Iperione (il Dio del Sole) li farà morire, risparmiando invece Ulisse che non si era macchiato di tale sacrilegio (e potrà quindi tornare infine alla sua Itaca).

quantità di sabbia molto più grande. Più grande anche - come egli precisa subito dopo, di tutta la sabbia che potrebbe essere contenuta "in un volume di grandezza tale quale quella della terra, avendo riempito tutti i mari e tutte le depressioni fino a raggiungere l'altezza delle più alte montagne". Da quello che egli dice nel prosieguo capiamo in realtà come ciò che Archimede si propone non è tanto misurare il numero dei granelli di sabbia davvero esistenti nel mondo, e neppure di quelli che vi potrebbero essere in un universo tutto infarcito di sabbia, ma piuttosto dimostrare come si possa scrivere un numero tanto grande da poter superare quello della moltitudine apparentemente innumerabile dei granelli contenuti in una massa di sabbia comunque grande la si concepisca. Impresa che a noi potrebbe sembrare, oltre che peregrina, anche piuttosto facile (basta figurarsi una potenza decimale con un esponente sufficientemente grande); ma che non era affatto tale nel sistema di numerazione usato dai greci, che si fondava sull'uso delle lettere del loro alfabeto e che, nell'uso ordinario convenzionale, a malapena arrivava a cifre dell'ordine delle decine di migliaia. Bisogna dire in effetti come la possibilità che ora noi abbiamo di poter esprimere abbastanza facilmente numeri molto grandi usando una quantità modesta di caratteri (e compiere così senza tanta fatica operazioni su grandezze che superano di gran lunga la nostra capacità di immaginazione) è in parte l'esito della storia iniziata con lo sforzo apparentemente ozioso di questo geniale "Contatore di sabbia" (è questo la forma italiana del titolo dell'opera di Archimede usato in lingue come l'inglese – *Sand-Reckoner* – e il tedesco *Sand-Rechnung* - che però vuol dire più precisamente "La conta della sabbia").

Senza voler seguire in dettaglio i procedimenti matematici sviluppati per contare tutta la sabbia che potrebbe esserci in un mondo tutto fatto di questa materia pulviscolare diciamo subito quale sia uno dei motivi di interesse dell'Arenario per astronomi ed appassionati di astronomia. Nel suo sforzo di quantificare l'immenso numero dei granelli di sabbia e dimostrare la sua "scrivibilità" nel sistema di numerazione greco, come si conviene a un buon matematico Archimede cerca innanzitutto di ottenere una misura dell'universo, cioè della superba costruzione mentale con la quale il pensiero classico si sforzava di racchiudere la totalità dell'esistente (sfuggendo così – anche ad un livello astratto - alle vertigini dell'infinito). Due erano infatti i requisiti fondamentali dell'arduo calcolo: da una parte le dimensioni immensamente grandi – ma non infinite per gli astronomi classici - del contenitore (l'universo appunto); e dall'altra le dimensioni delle unità - estremamente più minute - del contenuto, cioè dei piccolissimi (e anche abbastanza irregolari) chicchi di cui la sabbia si compone. Per Archimede (come per la maggioranza degli astronomi dell'antichità classica) l'universo era lo spazio delimitato dalla cosiddetta "sfera delle stelle fisse", cioè da quella visibile - ma del tutto inesistente - sfera che in una notte chiara ci sovrasta e ci affascina con la sua apparente materialità, ma che è solo conseguenza illusiva dei limiti della nostra capacità visiva, e in particolare della nostra impossibilità di discriminare le distanze effettive di oggetti "sufficientemente" lontani, come sono appunto le stelle del cielo. Tutto ciò che supera distanze di qualche diecina o centinaio di metri ci appare (in particolare in assenza di riferimenti visivi familiari) alla stessa distanza; e nello spazio tridimensionale il luogo di oggetti situati alla stessa distanza percettiva è una sfera, quella appunto delle stelle fisse nel caso del cielo notturno. In realtà a questa superficie illusiva apparterebbero su base percettiva anche i pianeti e la luna – cioè le stelle vaganti. Di questi però, sin da tempi remoti gli astronomi avevano però stabilito, e su basi non percettive, la minore lontananza rispetto alle stelle "non vaganti" – seppure perlopiù con una precisione abbastanza scarsa.

Di grande interesse per gli storici dell'astronomia il fatto che, per giungere a una misura del diametro della sfera delle stelle fisse - Archimede prenda in considerazione non tanto il modello prevalente del cosmo classico basato sulla centralità della terra, quanto piuttosto quello meno convenzionale sostenuto da Aristarco di Samo, al cui centro era il sole, con la terra orbitante attorno al fulgido astro in un ampio movimento di rivoluzione annuale. Sembra che in effetti l'Arenario contenga il più antico riferimento al modello eliocentrico di Aristarco (un modello che sarà poi - da Copernico in poi - un riferimento fondamentale per la rivoluzione scientifica moderna). È verosimile che il riferimento ad Aristarco fosse fatto di proposito da Archimede (che aveva buoni fondamenti di astronomia derivati probabilmente dall'insegnamento del padre, un astronomo). E questo per la ragione che l'universo immaginato da Aristarco doveva essere di necessità più grande di quello geocentrico. Questo a sua volta per una ragione importante, che non viene discussa in modo esplicito nell'Arenario (ma che sarà al centro di aspri dibattiti all'epoca di Galileo), e cioè l'impossibilità di percepire una variazione significativa della parallasse stellare nel corso del moto annuale della terra. Questo moto avrebbe infatti comportato uno spostamento della posizione relativa dell'osservatore rispetto alle stelle fisse di gran lunga superiore di quello corrispondente al modello geocentrico (dove il movimento diurno delle stelle era attribuito ad un vero movimento della sferra stellare rispetto ad una terra del tutto immobile).

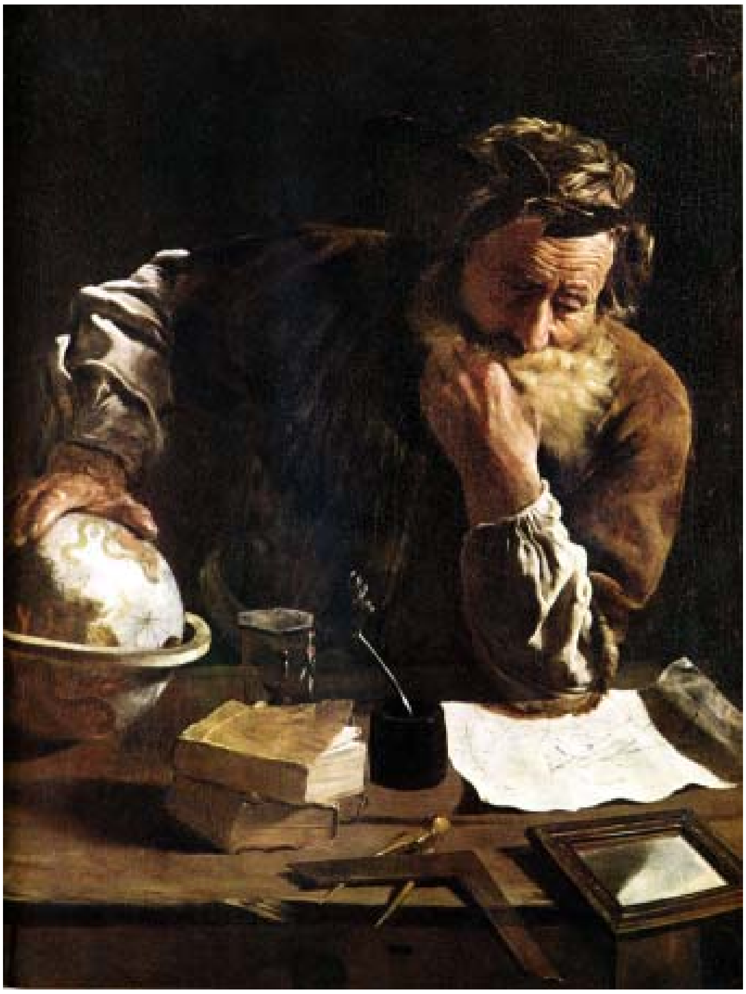

Fig. 1. Archimede pensoso, impegnato nei suoi calcoli e riflessioni matematiche in un dipinto seicentesco di Domenico Fetti, un allievo di Cigoli (grande amico di Galileo e suo alleato nella sua battaglia intellettuale contro gli astronomi tradizionalisti).

Sebbene nell'Arenario Archimede sviluppi i ragionamenti che lo porteranno a dare una stima del possibile diametro della sfera delle stelle fisse sulla base delle conoscenze astronomiche della sua epoca, è chiaro che – anche da questo punto di vista - il suo è più un interesse di matematico (nel senso moderno della parola) che di astronomo. In effetti nelle fasi intermedie del processo che lo porta a stimare il diametro della sfera stellare egli fa un ampio uso di una procedura di approssimazione prettamente matematica, il cosiddetto "metodo di esaustione", una procedura che gli aveva permesso in passato di giungere a risultati importanti come il calcolo del rapporto tra la circonferenza e il diametro del cerchio (quella costante che, da Eulero in poi, noi indichiamo come π - cioè "pi greco" - e gli era stato anche di grande utilità in quello che riteneva il suo risultato matematico più straordinario, la dimostrazione che il volume di una sfera è uguale a 2/3 del volume del cilindro circoscritto. Il calcolo di π era ovviamente un calcolo approssimato - sebbene piuttosto preciso per l'epoca- non solo perché, come ben sappiamo – trattandosi di un numero irrazionale non può essere espresso in modo preciso da nessuna cifra finita di numeri (per quanto possano essere i decimali). In effetti come si conveniva al metodo da lui utilizzato (che consisteva nell'approssimare un cerchio con poligoni regolari di un numero crescente di lati - rispettivamente uno inscritto e l'altro circoscritto al cerchio) fino a 96 ne prese in considerazione di poligoni il nostro paziente, oltre che geniale, matematico), riuscendo così nel caso di π a dare un intervallo di valori tra i quali l'elusivo numero doveva essere compreso.

Questo dell'intervallo di approssimazione è il *leit-motiv* delle valutazioni o misure macro- o micro-cosmiche dell'Arenario. E tra queste quella che ci interessa di più per collegare l'antico contatore della sabbia al meno antico misuratore della grandezza delle immagini stellari, Archimede a Galileo, in questa nostro divagante percorso matematico-astronomico. La misura del diametro del sole è necessaria per il matematico siracusano come tappa intermedia di un processo che, sulla base dei valori della grandezza della terra, della luna e della distanza terra-luna e terra-sole, arriva infine a dare una stima del diametro della sfera stellare. Questo perché egli assume vi siano delle proporzioni definite tra questi parametri astronomici. In particolare il diametro del sole (ritenuto 30 volte maggiore di quello della luna) viene assunto maggiore del poligono regolare di mille lati (o chiliagono) inscritto nel cerchio corrispondente all'orbita della terra intorno al sole (un'orbita che racchiude il "cosmo", la sfera avente come diametro la distanza terra-sole). Inoltre sulla base di una sua personale interpretazione del pensiero di Aristarco, Archimede assume che esista la stessa proporzione tra grandezza della terra e grandezza del cosmo da una parte e grandezza del cosmo e grandezza della sfera delle stelle fisse dall'altra. Tutto questo sia detto allo scopo di far apparire la necessità per Archimede di misurare la grandezza dell'immagine del sole (per poli risalire alle sue dimensioni reali sulla base della distanza terra-sole), e anche di giustificare, sulla base del suo ricorso al metodo di esaustione, il suo particolare approccio alla misura del diametro solare. Vero elemento di connessione, come abbiamo già detto tra lui e Galileo in questa storia che stiamo raccontando.

È tempo ora di entrare pienamente nell'argomento, cioè nel modo in cui - nella sua ossessiva attrazione per un metodo di approssimazioni di misura sempre più precise - il nostro matematico si propone - come egli stesso si esprime - di misurare "un angolo che sia non maggiore dell'angolo compreso tra il sole e che ha vertice nell'occhio, e di nuovo di misurare un altro angolo che sia non minore dell'angolo compreso dal sole e avente il vertice nell'occhio"; di stabilire insomma – sulla base di determinazioni visive - due valori tra i quali il vero diametro del sole possa essere collocato con sufficiente precisione. Il metodo utilizzato a questo scopo è in linea di principio abbastanza semplice: si tratta di ottenere una misura angolare della grandezza dell'immagine di un cilindretto posto ad una distanza tale da occultare "quasi" (sia in eccesso che in difetto come si vedrà) la vista del disco solare. Il punto importante per la nostra storia che connette Archimede alle prese colla grandezza del sole, a Galileo impegnato a misurare le stelle, è che si tratta di un metodo di occultazione, cioè di un metodo in cui la misura angolare dell'immagine luminosa lontana viene ottenuta sulla base della misura dell'angolo visivo sotteso da un cilindretto di adatta grandezza posto ad una distanza dall'occhio tale da corrispondere (con la solita approssimazione del più o meno cara al nostro matematico) nel modo più preciso possibile al disco solare. In effetti vi sarebbero stati altri possibili metodi per giungere ad una misura approssimata del diametro apparente del sole basati su una procedura visiva diverso da quella basata sull'occultazione dell'immagine solare da parte di un oggetto interposto nella linea di sguardo. Tra questi per esempio quello abbastanza ovvio, e abbastanza intuitivo (e ripreso poi in molti strumenti astronomici – generalmente indicati come "diottre", ampiamente utilizzati nel Medioevo e Rinascimento), di traguardare la visione del sole (o eventualmente di altri corpi celesti) attraverso un foro praticato su una laminetta (o "pinnula") la cui distanza dall'osservatore poteva essere variata fino a che il foro circoscrivesse abbastanza esattamente l'immagine del corpo celeste da misurare. Un metodo questo simile nella procedura pratica a quello dell'occultamento, ma diverso nel fatto che l'oggetto luminoso di cui misurare il diametro viene circoscritto, ovvero delimitato dall'esterno, e non – invece - "coperto" dall'interno, ossia occultato. È generalmente sull'uso di metodi di "circoscrizione" dell'immagine del corpo celeste da parte di un foro circolare posto a variabile distanza che si è fondata fonda storicamente la determinazione della grandezza apparente delle stelle, origine dell'ancora attuale classificazione degli astri sulla base della magnitudo. La differenza tra i metodi tradizionali di circoscrizione visiva e quello dell'occultamento, usato da Archimede per il sole, e ripreso da Galileo per le stelle, si rivelerà critica - come vedremo – per le conclusioni che ne trarrà lo scienziato toscano contro le obbiezioni al sistema copernicano basate sulla tradizionale – e molto erronea "per eccesso" – valutazione della grandezza apparente delle stelle.

[1] Il problema, di cui la paternità archimedea è molto probabile, sebbene non del tutto certa (almeno nella integralità del testo giunto fino a noi attraverso un complesso processo di trasmissione) viene posto in forma poetica (di epigramma). Il quesito matematico si articola in due fasi di crescente difficoltà. Si tratta di calcolare il numero dei vari tipi di buoi del Dio Sole che pascolano per le spiagge della Sicilia (tori e vacche). I buoi sono di vario colore (bianchi, neri, fulvi e screziati) e il calcolo deve soddisfare a una serie di condizioni matematiche piuttosto arzigogolate. Nella prima fase viene stabilita una serie intricata di relazioni nell'ambito dei due gruppi (tori e vacche) tra i buoi di un dato colore e quelli di un altro (come per esempio "che i tori bianchi fossero in numero uguale ad una metà più un terzo dei neri, più tutti i fulvi; e che i tori neri fossero in numero uguale alla quarta parte più un quinto degli screziati, più tutti i fulvi"). In termini matematici queste condizioni configurano una serie di sette relazioni lineari in otto incognite. Viene detto che chi sarà in grado di risolvere il problema a questo stadio, sebbene non possa essere tacciato di ignoranza della matematica, nondimeno non potrà pretendere di essere annoverato tra i "sapienti della materia". Per aspirare al gradino più elevato della scienza dei numeri bisognerà essere in grado di trovare la soluzione che soddisfa a due ulteriori condizioni che riguardano le possibile disposizioni spaziali della mandria nel suo complesso (condizioni che qui non trascriviamo ma che – sia detto - definiscono due relazioni matematiche di tipo quadratico). Gli studiosi moderni che si sono cimentati col problema dei *Buoi del Sole* (a partire dal matematico tedesco Carl Ernst August Amthor che per primo ne diede una soluzione nel 1880) hanno dovuto operare delle scelte interpretative sul testo del problema (che era andato probabilmente corrotto nel corso dei secoli per l'opera di copisti e traduttori). In ogni caso le soluzioni prevedono numeri eccezionalmente grandi (di 206545 cifre nel caso delle soluzioni di Amthor) e questo è un indizio della paternità archimedea del problema, data la propensione del matematico siracusano per i grandi numeri particolarmente evidente nel caso dell'*Arenario*. Prima di concludere questa lunga nota (e tornare alla conta dei granelli

di sabbia) conviene forse qui rammentare che alle mandrie dei buoi del Sole che pascolano nelle pianure di Sicilia evocati da Archimede appartenevano quelli uccisi e divorati dai marinai di Ulisse. Per questo Iperione (il Dio del Sole) li farà morire, risparmiando invece Ulisse che non si era macchiato di tale sacrilegio (e potrà quindi tornare infine alla sua Itaca).